л.3 + 3.1

Правила теории вероятностей на примере анализа случайных ошибок (оценке точности приборов).

Задача состоит в оценке точности, когда речь идет не о конкретном экземпляре, а о группе механизмов, изготовленных по одним чертежам.

В этом случае оценка точности может быть дана только в вероятностном смысле. С этой целью разделим все первичные ошибки на ***систематические*** и ***случайные***. ***Систематическими*** называются такие ошибки, которые изменяются по известному закону и, в частности, являются постоянными. ***Случайными*** называются ошибки, значения которых заранее не известны. Известно только, что они не должны превышать допуска. Анализ случайных ошибок механизмов, который должен проводиться для предсказания ожидаемой точности, производится по правилам теории вероятностей.

Напомним некоторые необходимые сведения этой теории. С вероятностной точки зрения всякая непрерывная случайная величина ***x*** полностью характеризуется дифференциальным законом распределения ***f(x)***. Этот закон часто называют плотностью вероятности или просто законом распределения. Произведение плотности вероятности ***f(x)*** на элементарный отрезок ***dx*** является вероятностью попадания величины ***x*** в элементарный отрезок ***dx*** и называется элементом вероятности.

Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину плотностью вероятности. Зачастую достаточно бывает указать только некоторые числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Из этих параметров наиболее часто пользуются ***математическим ожиданием***, ***модой***, ***дисперсией*** и **средним квадратическим** отклонением случайной величины.

Первые две характеристики случайной величины являются мерой положения. Они определяют некоторое среднее, ориентировочное значение случайной величины, около которого группируются все ее возможные значения.

Математическое ожидание x случайной величины ***x*** есть тот предел, к которому сходится среднее арифметическое наблюдение этой величины при большом числе опытов:

- для непрерывных величин: $m_x = \bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ **(1)**

- для дискретных величин: $m_x = \bar{x} = \sum p_i x_i$ (вероятность p_i появления значения x_i)

Модой непрерывной случайной величины называется то ее значение, для которой дифференциальный закон распределения (плотность вероятности) достигает максимума (рис.1).

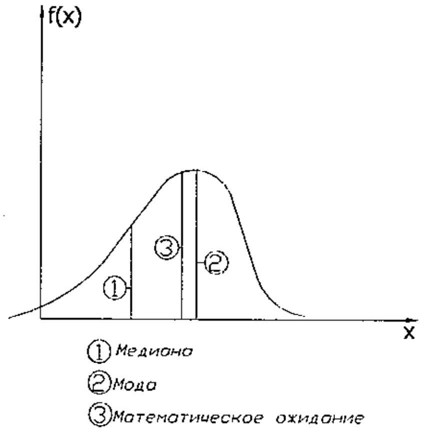

рис.1

3,2

Медиана характеризует расположение центра группирования случайной величины.

Дисперсией D(x) случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины x от ее математического ожидания:

- для непрерывных величин: $D(x) = \overline{(x-\bar{x})^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 \cdot f(x)dx$ **(2)**

- для дискретных величин: $D(x) = \sum (x_i - m_x)^2 \cdot p_i$

Дисперсия – рассеяние – разброс случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение σ есть корень квадратный из дисперсии:

$$S_x = \sigma = \sqrt{D(x)} \qquad \textbf{(3)}$$

Преимущество среднего квадратического отклонения перед дисперсией заключается в том, что оно имеет размерность случайной величины. Заметим, что если закон распределения является нормальным законом Гаусса, то перечисленные характеристики полностью определяют случайную величину. Для симметричного модального (т.е. имеющего один максимум) распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

Квантилью называют значение случайной величины, соответствующее заданной вероятности. Квантиль, соответствующая вероятности 0.5, называется ***медианой***. Площадь под графиком функции плотности распределения делится медианой пополам.

Коэффициент вариации – это отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию.

$$V_x = \frac{S_x}{m_x}$$

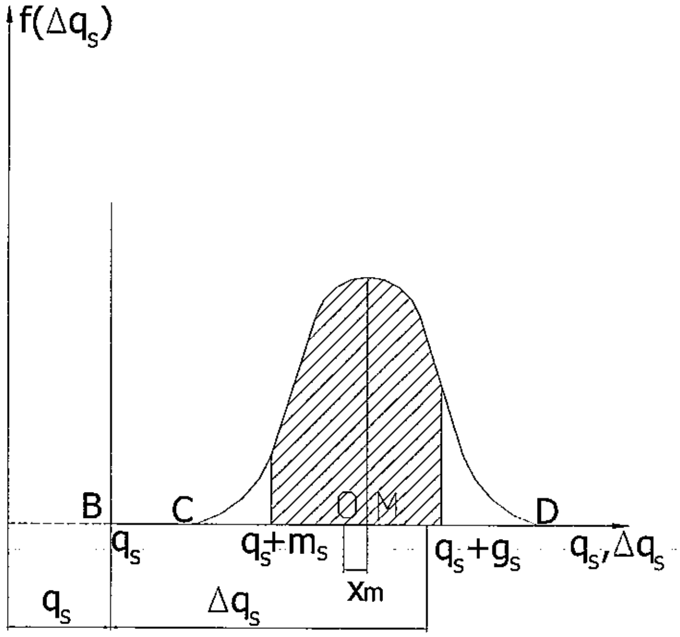

рис.2

Для определения вероятностных характеристик ошибки положения группы механизмов математическое ожидание и дисперсия первичных ошибок должны быть заданы. Форма задания может быть различна.

Рассмотрим рис.2, на котором изображен закон распределения ошибки.

Размеры откладываются от некоторой точки, совпадающей с началом координат. В точке ***B*** находится конец отрезка, изображающий номинальный размер q_S. Допуск детали задан размерами:

$$q_S + m_S \quad \text{и} \quad q_S + g_S$$

Точкой ***O*** на оси абсцисс отмечена координата, равная середине поля допуска и отстоящая от номинала на расстоянии $1/2\cdot(m_S + g_S)$. Точкой ***M*** на оси абсцисс обозначена мода.

В случае, когда закон распределения ошибки является симметричным и имеет одну моду, а поле допуска в свою очередь симметрично относительно моды, то середина поля допуска, мода, и математическое ожидание совпадают.

При этом математическое ожидание $a_S = \Delta q_S$ ошибки Δq_S, будет равно

$$a_S = 1/2\cdot(m_S + g_S) \qquad \textbf{(4)}$$

В случае, которой имеет место на рис.2, математическое ожидание смещено относительно точки ***O***. Это смещение выражается в долях половины поля допуска δ_S:

$$a_S = \Delta\overline{q}_S = 1/2\cdot(m_S + g_S) + a_S\delta_S \qquad \textbf{(5)}$$

Дисперсия D_S первичной ошибки выражается в долях квадрата половины поля допуска:

$$D_S = (k_S)^2\cdot(\delta_S)^2/9 \qquad \textbf{(6)}$$

Коэффициент k_S так же, как и коэффициент a_S, зависит от закона распределения, величины поля допуска и их взаимного расположения, то есть зависит от условий производства. При различных, встречаемых на практике, кривых распределения производственных погрешностей коэффициент a_S лежит примерно в границах ± 0.5, коэффициент k_S изменяется в пределах от 1 до 2.3.

Отметим один важный частный случай, когда закон распределения первичных ошибок есть нормальный закон Гаусса и поле допуска расположено симметрично относительно моды кривой распределения.

Как известно, нормальный закон распределения (рис.3) выражается функцией:

$$f(\Delta q_S) = (h/\sqrt{\pi})\cdot e^{-h^2*(\Delta q_S - \Delta q_S)^2}\ , \qquad \textbf{(7)}$$

где ***h*** – мера точности.

Среднее квадратическое отклонение от этого закона связано с мерой точности следующим образом:

$$\sigma = 1/(h\cdot\sqrt{2})$$

Если принять что половина поля допуска составляет 3σ, то на отрезок оси абсцисс, равный 6σ, будет опираться 39,46% всей площади кривой распределения. Эта площадь в процентах пропорциональна количеству деталей, размер которых укладывается в поле допуска $2\delta_S$. Рассматриваемый случай означает, что допуск обеспечивается точностью производства. (задани

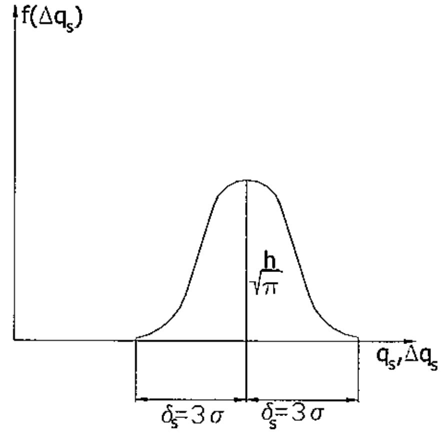

Рис.3

При этих условиях $k_S = 1$ и $\alpha_S = 0$.

Задав вероятностные характеристики первичных ошибок, можно перейти к определению математического ожидания и дисперсии ошибок положения. При этом для определения математического ожидания будем пользоваться следующими двумя теоремами.

Теорема 1: Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.

Теорема 2: Математическое ожидание произведения двух независимых величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

$$\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \textbf{(8)}$$

Имея в виду эти теоремы, а также выражение (10), найдем математическое ожидание ***"а"*** ошибки положения (Δf - ошибка положения механизма, Δq_S - первичная ошибка (производственная)):

$$a = \overline{\Delta\varphi} = \Sigma[(\overline{\partial\varphi_0 / \partial q_S}) \cdot a_S], \text{ где} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\Delta f = \sum_S \frac{\partial f_0}{\partial q_S} \cdot \Delta q_S \qquad \textbf{(10)}$$

($\partial f_0 / \partial q_S$, стоящая при скалярной первичной ошибке Δq_S)

Частная производная $\frac{\partial f_0}{\partial q_s}$, стоящая при скалярной первичной величине Δq_S, по самому смыслу производной не зависит от ошибки Δq_S и не является случайной величиной. В этом случае:

$$\overline{\partial\varphi_0 / \partial q_S} = \partial\varphi_0 / \partial q_S$$

Если ошибка Δq_S - векторная, то частная производная $\partial\varphi_0 / \partial q_S$ зависит не только от обобщенных координат ведущих звеньев, но и от случайной величины

3,5

аргумента векторной ошибки и является, поэтому случайной величиной. Математическое ожидание этой величины следует находить, сообразуясь с конкретной задачей.

В качестве примера вычислим математическое ожидание частной производной ошибки эксцентриситета (9а) кулачка:

$$\frac{\partial \psi_э}{\partial \Delta_э} = \frac{\cos(\chi - \beta_э)}{O_1F} \qquad (1)$$

где $\Delta f_э$ - ошибка в угле поворота коромысла, вызванная эксцентриситетом кулачка; O_1F - перпендикуляр к нормали NN .

Предполагая, что случайный угол p , подчиняется закону равной вероятности в пределах от 0 до 2π , то есть функция закона распределения $f(\beta_э) = 1/2\pi$, на основании формулы (1) получим:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_э}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\pi \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\chi - \beta_э)/(O_1F)] d\beta_э = 0$$

Откуда видно, что математическое ожидание ошибки положения, вызванное эксцентриситетом кулачка, равно нулю.

Для определения дисперсии ошибки положения воспользуемся следующими теоремами теории вероятности.

Теорема 1: Дисперсия случайной величины (независима от ее закона распределения) равна среднему значению квадрата случайной величины минус квадрат среднего значения этой величины:

$$D(x) = \overline{(x - \overline{x})^2} = \overline{x}^2 - \overline{x}^2$$

Теорема 2: Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(\sum_S x_S) = \sum_S D(x_S)$$

Теорема 3: Дисперсия произведения независимых случайных величин вычисляется по формуле:

$$D(xy) = D(x)D(y) + D(x)a_y{}^2 + D(y)a_x{}^2 ,$$

где a_x, a_y - математические ожидания соответственно величин x, y.

Учитывая эти теоремы, напишем выражение для дисперсии ошибки положения

$$D(\Delta\varphi) = \Sigma[D_{\varphi S}(D_S + a_S{}^2) + a_{\varphi S} D_S], \qquad (11)$$

где $D_{\varphi S}$ - дисперсия частной производной $\partial\varphi_0 / \partial q_S$,

$a_{\varphi S} = \partial\varphi_0 / \partial q_S$ - математическое ожидание частной производной,

D_S - дисперсия первичной ошибки.

a_S - математическое ожидание первичной ошибки.

В качестве примера вычислим дисперсию частной производной ошибки эксцентриситета (9а). По определению:

$$D(\partial\varphi_0/\partial\Delta_э) = \overline{(\partial\varphi_0/\partial\Delta_э - \partial\overline{\varphi}_0/\partial\Delta_э)^2}.$$

Ранее было получено, что для $\partial\varphi_0/\partial q_s = 0$. Учитывая равновероятностный закон распределения аргумента $\beta_э$, получим:

$$D(\partial\varphi_0/\partial\Delta_э) = [\cos(\chi-\beta_э)/O_1F]^2 = (1/2\pi)\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left[\cos^2(\chi-\beta_э)/(O_1F)^2\right]d\beta_э = 0.5/O_1F^2.$$

Возвращаясь к формуле (11), подставим в нее выражение (6) для дисперсии ошибки

$$D(\Delta\varphi) = \sum\left[D_{\varphi s}\left((k_s^2/9)\cdot\delta_s^2 + a_s^2\right) + a_{\varphi s}^2\cdot(k_s^2/9)\cdot\delta_s^2\right] \qquad (11а)$$

Получив выражение (5) и (11а) математического ожидания и дисперсии ошибки положения для выяснения закона распределения этой величины напомним предельную теорему теории вероятностей Ляпунова.

Сумма достаточно большого числа независимых случайных величин приближенно подчиняется нормальному закону распределения.

Ограничения, которое накладывается на теорему, заключается в том, чтобы ни одна из случайных величин, входящая в сумму, не играла преобладающей роли по сравнению.

Тогда плотность вероятности величины $\Delta\varphi$ будет равна со всеми остальными.

На основании предельной теоремы принимаем, что закон распределения ошибки положения должен быть близким к закону Гаусса:

$$p(\Delta\varphi) = (1/\sqrt{2\pi D(\Delta\varphi)})\cdot e^{-(\Delta\varphi-\Delta\varphi)/2D(\Delta\varphi)} \qquad \textbf{(12)}$$

Предельная ошибка положения механизма δ равна трем среднеквадратическим ошибкам, то есть:

$$\delta = 3*\sigma$$

Используя последнее соотношение и формулу (11а), напишем выражение для квадрата предельной ошибки положения

$$\delta^2 = \sum[D_{\varphi s}(k_s^2\cdot\delta_s^2 + 9\cdot a_s^2) + a_{\varphi s}{}^2\cdot k_s\cdot\delta_s^2] \qquad \textbf{(12а)}$$

где $a_s = 1/2(g_s + m_s) + \alpha_s\delta_s$.

Напомним значения величин, входящих в формулу (12а):

$D_{\varphi s}$ - дисперсия частной производной $\partial\varphi_0/\partial q_s$

δ_S - половина поля допуска

g_S - нижняя граница поля допуска

m_S - верхняя граница поля допуска

k_S, α_S - коэффициенты, зависящие от характера производства

a_S - математическое ожидание первичной ошибки

$a_{\varphi s}$ - математическое ожидание частной производной

Для оценки предельной ошибки положения, когда коэффициенты k_S и α_S неизвестны, можно принять, что $k_S = 1$ и $\alpha_S = 0$.

Это соответствует тому случаю, когда все первичные ошибки подчиняются нормальному закону и допуск на детали задан симметрично относительно моды, причем $\delta_S = 3\sigma$. Тогда и a_S окажется равным нулю.

При этом квадрат предельной ошибки положения механизма:

$$\delta^2 = \Sigma[D_{\varphi S} + a_{\varphi S}{}^2]\cdot\delta_S{}^2, \qquad (13)$$

$D_{\varphi S} \neq 0$, когда первичная ошибка Δq_S является векторной величиной. 3,7

Если частная производная $\partial\varphi_0 / \partial q_s$ является постоянной величиной, то

$$D_{\varphi S} = 0 \text{ и } a_{\varphi S} = \partial\varphi_0 / \partial q_S$$

Тогда каждый член суммы (13) будет иметь вид $(\partial\varphi_0 / \partial q_s)^2 \cdot \delta_S{}^2$ и

$$\delta^2 = \Sigma(\partial\varphi_0 / \partial q_s)^2 \cdot \delta_S{}^2 \qquad \textbf{(14)}$$

Практически этот случай встречался наиболее часто.